

Diseño Disipativo de Observadores Adaptables para Sistemas con No Linealidades Multivaluadas

Eder Guzmán Jaime A. Moreno

Coordinación Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México D.F., Mexico

Email: ed_guba@hotmail.com, JMorenoP@ii.unam.mx

Resumen— Se desarrolla un observador adaptable para una clase de sistemas con no linealidades discontinuas o multivaluadas. El diseño se basa en la combinación de una forma de observador adaptable y el diseño del observador disipativo para sistemas multivaluados, introducido previamente en la literatura. También se obtiene una extensión de este resultado mostrando que si el grado relativo de la forma de observador adaptable se incrementa en uno, el diseño del observador adaptable aun es posible.

I. INTRODUCCIÓN

Los observadores adaptables, esto es observadores que estiman las variables de estado con alguna adaptación en línea de los parámetros desconocidos del sistema, ya eran estudiados en los 70s en el caso de sistemas lineales [20], [23]. Para algunas clases de sistemas no lineales (suaves) varios resultados han aparecido en la literatura [3], [13], [4]. Para sistemas lineales en los parámetros desconocidos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) + g(t, x, u) \theta, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada conocido, $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector parámetros desconocidos, y $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida (medible), Besançon en [4] (revisado en [5]) ha demostrado que muchos de los métodos existentes pueden ser unificados considerando una "Forma de Observador Adaptable" (FOA)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t) \theta, & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\zeta} &= Z(y, \zeta, u, t), \end{aligned} \quad (2)$$

que satisface algunas condiciones parecidas a la pasividad, y a la cual un sistema puede ser transformado a través de un cambio de coordenadas (posiblemente "filtradas"). La característica básica para la existencia de un Observador Adaptable, y esto es puesto en evidencia por la FOA (2) es que el "grado relativo" entre los parámetros desconocidos θ y la salida y es uno. Una forma alternativa de observador adaptable, con las mismas características que (2), ha sido propuesto en [14]. Para sistemas con parámetros que entran de manera no lineal en la dinámica algunos resultados recientes has sido obtenidos en [8], [10]. Sistemas con no linealidades fuertes, llámense discontinuidades o no linealidades multivaluadas son de gran importancia en aplicaciones. Considere por ejemplo el caso de sistemas mecánicos con fricción de Coulomb o estática,

o con histéresis, o sistemas híbridos y conmutados. Para sistemas en la forma de Lur'e (o que pueden ser llevados a ella), con no linealidades multivaluadas, dos puntos de vista diferentes (y de cierta forma complementarios) han sido propuestos recientemente en [6], [17]. Sin embargo, no se considera estimación de parámetros en ninguno de estos documentos. El objetivo de este trabajo es doble: Primero se extienden los resultados de [17] en observadores de estado al incluir estimación de parámetros para sistemas no lineales multivaluados. Para esto se asume que el sistema está en una forma similar a la Forma de Observador Adaptable (2). Dado que los resultados de [17] son una extensión del Método de Diseño Disipativo de observadores para sistemas con no linealidades suaves, introducido en [15], [18], [19], al caso multivaluado, las presentes ideas pueden ser aplicadas al Diseño Disipativo de Observadores para sistemas suaves. Un segundo objetivo es debilitar la condición de grado relativo de la FAO (2) de uno a dos. Esto puede ser logrado usando un observador (diferenciador) exacto y convergente en tiempo finito en la salida y para estimar su derivada. Para sistemas mecánicos (de segundo orden) una idea similar es propuesta en [7], donde el Algoritmo Super-Twisting es usado, y la convergencia ha sido probada usando argumentos geométricos. En su lugar, nosotros usamos el Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG), introducido en [16], y su convergencia es probada con argumentos de Lyapunov. El trabajo está organizado como sigue: En la Sección II un observador adaptable es construido para sistemas multivaluados en una forma semejante a la FOA (2). En la Sección III la forma especial es modificada al incrementar su grado relativo en uno, y un observador adaptable es diseñado introduciendo un algoritmo de diferenciación exacta. En la Sección IV un ejemplo académico es usado para ilustrar el desempeño del observador adaptable propuesto. Algunas conclusiones finalizan el artículo.

II. OBSERVADOR DISIPATIVO ADAPTABLE (ODA) PARA SISTEMAS MULTIVALUADOS

Suponga que el sistema no lineal multivaluado (1) puede ser llevado a la siguiente forma, motivado por la FOA (2) y la estructura de sistemas multivaluados para los cuales se puede diseñar un observador de estados usando el método mostrado en [17],

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(t, y, u, \xi) + \Gamma(t, y, u, \xi) \theta \\ \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v \in \Psi(t, \sigma) \\ y_2 = C\hat{\xi} \\ \sigma = H\hat{\xi} \end{cases} \quad (3)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^{n-m_1}$ es parte del vector de estado, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal del estado (no necesariamente medible), $\Psi(t, \sigma)$ es una función vectorial multivaluada de dimensión s , $y^T = [y_1^T, y_2^T]$ es el vector de salida $y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, con $m = m_1 + m_2$. $\varphi(t, y, u)$ es función no lineal de univaluada de (t, y, u) , continua en (y, u) .

Puesto que Ψ es multivaluada, las condiciones usuales de existencia y unicidad para no linealidades (localmente) Lipschitz no son satisfechas. Existencia local (en tiempo) de al menos una solución de (3) es asegurada si ciertas condiciones de la inclusión diferencial (3), escrita como $x \in f(t, x)$, son cumplidas [2]: (i) $f(t, x)$ es un subconjunto no vacío, compacto, convexo de \mathbb{R}^n para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$. (ii) $f(t, x)$, como un mapa multivaluado de x , es semicontinuo por arriba para cada $t \geq 0$. (iii) $f(t, x)$, como mapa multivaluado de t , es medible en el sentido de Lebesgue para cada x . (iv) $f(t, x)$ es localmente acotada.

Diseñamos para el sistema (3) un Observador Adaptable de la forma

$$\Sigma_{OD}: \begin{cases} \dot{\hat{y}}_1 = -k_y(\hat{y}_1 - y_1) + \alpha(t, y, u, \hat{\xi}) + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + L(\hat{y}_2 - y_2) + G\hat{v} + \varphi(t, y, u) \\ \hat{v} \in \Psi(t, \hat{\sigma} + N(\hat{y}_2 - y_2)) \\ \hat{y}_2 = C\hat{\xi} \\ \hat{\sigma} = H\hat{\xi} \\ \dot{\hat{\theta}} = -k_\theta \Gamma^T(t, y, \hat{\xi}, u)(\hat{y}_1 - y_1) \end{cases} \quad (4)$$

donde las ganancias de inyección de salida $k_y > 0$, $k_\theta > 0$, las cuales son escalares, y $L \in \mathbb{R}^{n-m_1 \times m_2}$, $N \in \mathbb{R}^{r \times m_2}$, las cuales son matrices, todas constantes, tiene que ser diseñadas.

Definiendo los errores de estimación como $e_{y_1} \triangleq \hat{y}_1 - y_1$, $e_\xi \triangleq \hat{\xi} - \xi$, $e_{y_2} \triangleq \hat{y}_2 - y_2$, $e_\sigma \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ and $e_\theta \triangleq \hat{\theta} - \theta$, su comportamiento dinámico puede ser escrito como

$$\Xi_\theta: \begin{cases} \dot{e}_{y_1} = -k_y e_{y_1} + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) e_\theta + \Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) + \\ + \Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) \theta \\ \dot{e}_\theta = -k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}) e_{y_1} \end{cases} \quad (5a)$$

$$\Xi_D: \begin{cases} \dot{e}_\xi = A_L e_\xi + G\vartheta \\ \vartheta \in -\varkappa(t, z, \sigma) \\ z = H_N e_\xi \end{cases} \quad (5b)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) &\triangleq \alpha(t, y, u, \hat{\xi}) - \alpha(t, y, u, \xi) \\ \Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) &\triangleq \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) - \Gamma(t, y, u, \xi) \\ A_L &= A + LC, \quad H_N = H + NC \end{aligned}$$

y $\varkappa(t, z, \sigma)$ es la no linealidad incremental

$$\varkappa(t, z, \sigma) \triangleq \Psi(t, \sigma) - \Psi(t, \sigma + z). \quad (6)$$

Para la convergencia del observador (4) una condición de disipatividad en la no linealidad (multivaluada) $\Psi(t, \sigma)$, y algunas restricciones de crecimiento sobre Δ_α , y Δ_Γ tienen que ser impuestas.

A1) $\varkappa(t, z, \sigma)$ es (Q, S, R) -Disipativa, esto es existen matrices constantes $Q \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $S \in \mathbb{R}^{s \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$, con Q y R simétricas, tal que para cada $t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ y $z \in \mathbb{R}^r$

$$\omega(v, z) = \vartheta^T Q \vartheta + 2\vartheta^T S z + z^T R z \geq 0, \quad \forall \vartheta \in \varkappa(t, z, \sigma) \quad (7)$$

La condición A1) es la generalización de las condiciones de sector [11] para no linealidades cuadradas, esto es, cuando $r = s$. Así, por ejemplo, si una no linealidad Ψ está en el sector $[K_1, K_2]$, i.e. $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$, entonces esta es (Q, S, R) -Disipativa, con $(Q, S, R) = (-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1))$.

A2) Las funciones α y Γ son continuas, y satisfacen las desigualdades:

$$\|\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi)\| \leq \delta_\alpha \|\hat{\xi} - \xi\| \quad (8a)$$

$$\|\Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi)\| \leq \delta_\Gamma \|\hat{\xi} - \xi\| \quad (8b)$$

$$\|\Gamma(t, y, \xi, u)\| \leq \Delta \quad (8c)$$

con $\delta_\alpha > 0$, $\delta_\Gamma > 0$ y $\Delta > 0$, para todo t , todo $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$, toda y , toda ξ y toda $\hat{\xi}$.

Para la convergencia de los parámetros la clásica condición de "excitación persistente" será requerida:

Definición 1: [13], [20] Una señal (escalar, vectorial o matricial) $\Omega(t)$ se dice que cumple con la condición excitación persistente si existe $T, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ tal que

$$\sigma_2 I \geq \int_t^{t+T} \Omega(\tau) \Omega^T(\tau) d\tau \geq \sigma_1 I > 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (9)$$

El siguiente teorema provee más condiciones para la convergencia del Observador Adaptable (4).

Teorema 1: Suponga que las condiciones A1) y A2) son satisfechas. Asuma además que existen matrices $P = P^T > 0$, N and L , y un escalar $\delta > 0$ tal que la siguiente desigualdad

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \delta P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (10)$$

se satisface. Entonces el sistema (4) es un observador para (3), tal que los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$ y $\|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\|$ convergen asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, y el error de estimación $\|\hat{\theta}(t) - \theta(t)\|$ permanece acotado.

Si adicionalmente, la matriz $\Gamma(t, y, \xi, u)$ cumple con la condición de excitación persistente, de acuerdo a la Definición 1, entonces el error de observación y el error en los parámetros convergen exponencialmente.

Demostración: De los trabajos [15], [17] se sabe que $V(e_\xi) = e_\xi^T P e_\xi$ es una función de Lyapunov para el subsistema (5b), donde $P = P^T > 0$ es una solución de (10) para algún $\delta > 0$. Su derivada puede ser acotada como sigue al usar las restricciones A1) y (10)

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_\xi) &= e_\xi^T A_L^T P e_\xi + \vartheta^T G^T P e_\xi + e_\xi^T P A_L e_\xi + e_\xi^T P G \vartheta \\ &\leq -\delta e_\xi^T P e_\xi = -\delta V(e_\xi) . \end{aligned}$$

mostrando que e_ξ converge exponencialmente a cero. Ahora considere para el sistema (5) la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V_e(e_{y1}, e_\theta, e_\xi) = \frac{1}{2} e_{y1}^T e_{y1} + \frac{1}{2k_\theta} e_\theta^T e_\theta + \rho e_\xi^T P e_\xi \quad (11)$$

Diferenciando (11) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= -k_y e_{y1}^T e_{y1} + e_{y1}^T \Gamma(\cdot) e_\theta + e_{y1}^T \Delta_\alpha(\cdot) + e_{y1}^T \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \\ &\quad - e_\theta^T \Gamma^T(\cdot) e_{y1} - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ &\leq -k_y \|e_{y1}\|^2 + \|e_{y1}\| \|\Delta_\alpha(\cdot)\| + \|e_{y1}\| \|\Delta_\Gamma(\cdot)\| \|\theta\| \\ &\quad - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2 \end{aligned}$$

y por A2) (8) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq -k_y \|e_{y1}\|^2 + (\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|) \|e_{y1}\| \|e_\xi\| + \\ &\quad - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2 . \end{aligned} \quad (12)$$

\dot{V}_e es negativa semidefinida si ρ es seleccionada tal que

$$\rho > \frac{(\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|)^2}{4k_y \delta \lambda_{\min}(P)} ,$$

lo cual es siempre posible, dado que θ es un vector desconocido constante, con una norma finita $\|\theta\|$. Esto implica que $\|e_{y1}\|$, $\|e_\xi\|$ y $\|e_\theta\|$ son acotadas. Además de (8) se deduce que $\|\dot{e}_{y1}\|$ es acotada también, así que de (12) se deduce que $e_{y1} \in \mathcal{L}_2$. Usando el lema de Barbalat se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{y1}(t)\| = 0$. Ahora, considerando el sistema Ξ_θ (5a) sin "perturbaciones", i.e. $\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) = 0$, $\Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) = 0$. Para cada $(y, u, \hat{\xi})$ este es un sistema Lineal Variante en el Tiempo con un punto de equilibrio $(e_{y1}, e_\theta) = 0$ *uniformemente estable*, como la función de Lyapunov $W(e_{y1}, e_\theta) = \frac{1}{2} e_{y1}^T e_{y1} + \frac{1}{2k_\theta} e_\theta^T e_\theta$ muestra. Además, cuando $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi})$ satisface la *condición de excitación persistente* el punto de equilibrio $(e_{y1}, e_\theta) = 0$ es *exponencialmente estable*, como es bien sabido [23], [20]. El teorema converso de Lyapunov [11] asegura que existe una función de Lyapunov cuadrática variante en el tiempo (posiblemente dependiente de las señales $(y, u, \hat{\xi})$),

$$W(t, e_{y1}, e_\theta) = (e_{y1}^T, e_\theta^T) \Pi(t) \begin{pmatrix} e_{y1}^T \\ e_\theta^T \end{pmatrix} ,$$

con una matriz $\Pi(t)$ simétrica, acotada y positiva definida, i.e. $0 < c_1 I \leq \Pi(t) \leq c_2 I$, y tal que su derivada

$$\dot{W}(t, e_{y1}, e_\theta) = - \begin{pmatrix} e_{y1}^T & e_\theta^T \end{pmatrix} \mathcal{Q}(t) \begin{pmatrix} e_{y1}^T \\ e_\theta^T \end{pmatrix} ,$$

con $\mathcal{Q}(t)$ una matriz positiva definida, simétrica, i.e. $0 < c_3 I \leq \mathcal{Q}(t)$. En este caso la siguiente es una candidata a función de Lyapunov para el sistema (5)

$$V_e(t, e_{y1}, e_\theta, e_\xi) = W(t, e_{y1}, e_\theta) + \rho e_\xi^T P e_\xi ,$$

donde $\rho > 0$ es una constante a ser seleccionada, y con derivada (se establece $f(t) = \Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) + \Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) \theta$)

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq - \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix}^T \mathcal{Q}(t) \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}^T \Pi(t) \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix}^T \Pi(t) \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ &\leq -c_3 \left\| \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} \right\|^2 + 2c_2 (\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|) \left\| \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} \right\| \|e_\xi\| \\ &\quad - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2 , \end{aligned}$$

donde (8) fue usada. Eligiendo

$$\rho > \frac{c_2^2 (\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|)^2}{\delta \lambda_{\min}(P) c_3}$$

\dot{V}_e se vuelve negativa definida y se puede concluir que el punto de equilibrio $(e_{y1}^T, e_\theta^T, e_\xi^T) = 0$ es global y exponencialmente estable. ■

El diseño de observador adaptable, una vez que el sistema ha sido transformado a la Forma de Observador Adaptable (3), consiste de dos pasos:

(i) Para el subsistema ξ , que es independiente de los parámetros desconocidos θ , un observador de estados es diseñado. En el presente caso esto es hecho desde el punto de vista disipativo, propuesto para sistemas multivaluados en [17]. Para este diseño, primero se tienen que encontrar las matrices Q, S, R que satisfagan la condición A1), y entonces se deben encontrar las matrices $L, N, P = P^T > 0$, y $\delta > 0$, tal que la desigualdad (10) sea satisfecha. Cuando las no linealidades son suaves este método incluye como caso especial al observador presentado en [15], que a su vez comprende el observador por criterio del círculo propuesto en [1], el observador Lipschitz [21], y el observador de alta ganancia [9]. Cuando la no linealidad es discontinua o multivaluada y monótona, corresponde a los casos cuando $R = 0, Q = 0, S = I$, que es el caso presentado en [6].

(ii) En un segundo paso se provee una ley de estimación para los parámetros desconocidos θ . En el presente caso, dado que la estimación de los estados $\hat{\xi}$ converge exponencialmente, independientemente de los parámetros, la estimación de parámetros puede ser hecha con algoritmos estándar, que convergerán bajo la condición clásica de excitación persistente.

III. OBSERVADOR DISIPATIVO ADAPTABLE CON ASTG

Note que la forma (3) y la FOA (2) tienen "grado relativo" uno entre los parámetros desconocidos θ y la salida y . Es intuitivamente claro, que si la salida y pudiera

ser exactamente diferenciada, tal que \dot{y} estuviera disponible, la condición de grado relativo podría ser debilitada a un grado relativo dos. Aunque no existen los diferenciadores perfectos, este objetivo puede cumplirse por medio de un algoritmo de modos deslizantes de segundo orden introducido en [12], y generalizado en [16]. Consideraremos por lo tanto sistemas en la forma

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{y}_1 = \eta \\ \dot{\eta} = \alpha(t, y, u, \xi, \eta) + \Gamma(t, y, u, \xi, \eta) \theta \\ \dot{\xi} = A\xi + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v \in \Psi(\sigma) \\ y_2 = C\xi, \\ \sigma = H\xi \end{cases} \quad (13)$$

esta es la misma forma (3) con grado relativo dos entre θ e y . Se asume que η , la derivada de y_1 , no es medible. Para (13) se asumen que la mismas condiciones impuestas sobre (3) son satisfechas. Por simplicidad nos restringimos al caso escalar para $y_1 \in \mathbb{R}$, pero todos los resultados pueden ser fácilmente extendidos al caso donde y_1 es un vector. Un Observador Adaptable se propone como

$$\Sigma_o : \begin{cases} \dot{\hat{y}}_1 = -k_1\phi_1(e_{y_1}) + \hat{\eta}_s \\ \dot{\hat{\eta}}_s = -k_2\phi_2(e_{y_1}) + \alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\eta}}_D = -k_\eta(\hat{\eta}_D - \hat{\eta}_s) + \alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + L(\hat{y}_2 - y_2) + G\hat{v} + \varphi(t, y, u) \\ \hat{v} \in \Psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y}_2 - y_2)) \\ \hat{y}_2 = C\hat{\xi}, \\ \hat{\sigma} = H\hat{\xi} \\ \dot{\hat{\theta}} = -k_\theta\Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s)(\hat{\eta}_D - \hat{\eta}_s) \end{cases} \quad (14)$$

donde

$$\phi_1(e_{y_1}) = \mu_1 |e_{y_1}|^{1/2} \text{sign}(e_{y_1}) + \mu_2 e_{y_1}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \quad (15)$$

$$\phi_2(e_{y_1}) = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(e_{y_1}) + \frac{2}{3} \mu_1 \mu_2 |e_{y_1}|^{1/2} \text{sign}(e_{y_1}) + \mu_2^2 e_{y_1} \quad (16)$$

son las funciones de inyección de salida del Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG), introducido en [16]. μ_1 y μ_2 son constantes positivas fijas. Además, las ganancias de inyección de salida $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_\eta > 0$, $k_\theta > 0$, las cuales son escalares, y $L \in \mathbb{R}^{n-m_1 \times m_2}$, $N \in \mathbb{R}^{r \times m_2}$, las cuales son matrices, todas constantes, tienen que ser diseñadas.

La dinámica de los errores de estimación, incluyendo $e_{\eta_D} = \hat{\eta}_D - \eta$, $e_{\eta_s} = \hat{\eta}_s - \eta$, pueden ser escritos como

$$\Xi_{ST} : \begin{cases} \dot{e}_{y_1} = -k_1\phi_1(e_{y_1}) + e_{\eta_s}, \\ \dot{e}_{\eta_s} = -k_2\phi_2(e_{y_1}) + \chi_2(t) \end{cases} \quad (17a)$$

$$\Xi_\theta : \begin{cases} \dot{e}_{\eta_D} = -k_\eta e_{\eta_D} + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) e_\theta + f_1(t) \\ \dot{e}_\theta = -k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) e_{\eta_D} + f_2(t) \end{cases} \quad (17b)$$

$$\Xi_D : \begin{cases} \dot{e}_\xi = A_L e_\xi + G\vartheta \\ \vartheta \in -\varkappa(t, z, \sigma) \\ z = H_N e_\xi \end{cases} \quad (17c)$$

donde $\varkappa(t, z, \sigma)$ es la no linealidad definida en (6),

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma(\cdot) e_\theta + \Delta_\alpha(\cdot) + \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \end{bmatrix} \\ f(t) = \begin{bmatrix} k_\eta e_{\eta_s} + \Delta_\alpha(\cdot) + \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \\ k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) e_{\eta_s} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta) = \alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) - \alpha(t, y, u, \xi, \eta)$$

$$\Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta) = \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) - \Gamma(t, y, u, \xi, \eta)$$

y hemos usado el hecho de que $\hat{\eta}_D - \hat{\eta}_s = e_{\eta_D} - e_{\eta_s}$. Como en la Sección previa, la condición Disipativa A1) sobre \varkappa será impuesta. En lugar de A2) las siguientes condiciones sobre el crecimiento de las no linealidades α y Γ serán asumidas:

A3) Las funciones α y Γ son continuas, y satisfacen las desigualdades:

$$\|\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta)\| \leq \delta_{\alpha\xi} \|\hat{\xi} - \xi\| + \delta_{\alpha\eta} \|\hat{\eta}_s - \eta\| \quad (20a)$$

$$\|\Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta)\| \leq \delta_{\Gamma\xi} \|\hat{\xi} - \xi\| + \delta_{\Gamma\eta} \|\hat{\eta}_s - \eta\| \quad (20b)$$

$$\|\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s)\| \leq \Delta \quad (20c)$$

con $\delta_\alpha > 0$, $\delta_\Gamma > 0$ y $\Delta > 0$, para todo t , todo $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$, y todas las trayectorias de la planta.

El siguiente teorema provee condiciones para la convergencia del Observador Adaptable (14).

Teorema 2: Suponga que las condiciones A1) y A3) son satisfechas. Asuma además que existen matrices $P = P^T > 0$, N y L , y un escalar $\delta > 0$ tal que la desigualdad matricial (10) se satisface, y la matriz $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s)$ cumple con la condición de excitación persistente, de acuerdo a la Definición 1. Entonces para cada conjunto compacto del vector de parámetros $\Theta_p = \{\theta \in \mathbb{R}^q \mid \|\theta\| \leq p\}$, existe un valor de μ_2 tal que el sistema (14) es un observador adaptable exponencial para (13), tal que los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$, $\|\hat{\eta}_D(t) - \eta(t)\|$, $\|\hat{\eta}_s(t) - \eta(t)\|$, $\|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\|$ y el error de estimación de los parámetros $\|\hat{\theta}(t) - \theta(t)\|$ converge exponencialmente a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Además, los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$, $\|\hat{\eta}_s(t) - \eta(t)\|$ convergen en tiempo finito a cero.

Demstración: Note que, cuando $e_{\eta_s} = 0$, los subsistemas (17b-17c) corresponden a la dinámica de error (5), que de acuerdo con el Teorema 1 tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable, si $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s)$ cumple con la condición de excitación persistente. El Teorema converso de Lyapunov provee una función de Lyapunov cuadrática (ver la prueba del Teorema 1)

$$V_2(t, e_2) = e_2^T \text{diag}\{\Pi(t), \rho P\} e_2$$

donde $e_2^T = (e_{\eta_D}^T, e_{\theta}^T, e_{\xi}^T)$, y $\rho > 0$ es una constante. El subsistema (17a) es un algoritmo Super-Twisting. Esto puede ser reescrito en términos del vector $\zeta^T = (\phi_1(e_{y_1}), e_{\eta_s})$ como

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{pmatrix} \phi_1'(e_{y_1})(-k_1\phi_1(e_{y_1}) + e_{\eta_s}) \\ -k_2\phi_2(e_{y_1}) + \chi_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \phi_1'(e_{y_1})\mathcal{A}\zeta + \chi(t) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma(\cdot)e_{\theta} + \Delta_{\alpha}(\cdot) + \Delta_{\Gamma}(\cdot)\theta \end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_1'(e_{y_1}) = \frac{\mu_1}{2|e_{y_1}|^{1/2}} + \mu_2 \end{aligned}$$

y la relación $\phi_2(e_{y_1}) = \phi_1'(e_{y_1})\phi_1(e_{y_1})$ ha sido usada. Una función de Lyapunov se construiría como (ver [16]) $V_1(e_1) = \zeta^T Y \zeta$, donde $Y = Y^T > 0$ es la única solución positiva definida y simétrica de la Ecuación Algebraica de Lyapunov $\mathcal{A}^T Y + Y \mathcal{A} = -\Omega$ con una $\Omega = \Omega^T > 0$ arbitraria, y $e_1^T = (e_{y_1}^T, e_{\eta_s}^T)$. Para el sistema (17) una candidata a función de Lyapunov se propone como

$$V_e(t, e_1, e_2) = \zeta^T Y \zeta + e_{\eta}^T \Pi(t) e_{\eta} \theta + \rho e_{\xi}^T P e_{\xi},$$

donde $e_{\eta\theta}^T = (e_{\eta_D}^T, e_{\theta}^T)$, $\rho > 0$ es una constante positiva, y $\Omega = I$, la matriz identidad. Su derivada es

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= \phi_1'(e_{y_1}) \zeta^T (\mathcal{A}^T Y + Y \mathcal{A}) \zeta + 2\chi^T(t) Y \zeta - e_{\eta\theta}^T \mathcal{Q}(t) e_{\eta\theta} \\ &\quad + f^T(t) \Pi(t) e_{\eta\theta} + e_{\eta\theta}^T \Pi(t) f(t) - \rho \delta e_{\xi}^T P e_{\xi} \\ &\leq - \begin{bmatrix} \|\zeta\| \\ \|e_{\eta\theta}\| \\ \|e_{\xi}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g & \gamma^T \\ \gamma & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\zeta\| \\ \|e_{\eta\theta}\| \\ \|e_{\xi}\| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g &= \mu_2 + 2\lambda_{\max}(Y)(\delta_{\alpha\eta} + \delta_{\Gamma\eta}\|\theta\|) \\ G &= \begin{bmatrix} c_3 & -\frac{1}{2}c_2(\delta_{\alpha\xi} + \delta_{\Gamma\xi}\|\theta\|) \\ * & \rho\delta\lambda_{\min}(P) \end{bmatrix} \\ \gamma^T &= [\gamma_1 \quad \gamma_2] \\ \gamma_1 &= -\lambda_{\max}(Y)\Delta - c_2(k_{\eta} + k_{\theta}\Delta + \delta_{\alpha\eta} + \delta_{\Gamma\eta}\|\theta\|) \\ \gamma_2 &= -\lambda_{\max}(Y)(\delta_{\alpha\xi} + \delta_{\Gamma\xi}\|\theta\|) \end{aligned}$$

y las desigualdades

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &\leq (k_{\eta} + \delta_{\alpha\eta} + k_{\theta}\Delta + \delta_{\Gamma\eta}\|\theta\|)\|\zeta\| + (\delta_{\alpha\xi} + \delta_{\Gamma\xi}\|\theta\|)\|e_{\xi}\| \\ \|\chi(t)\| &\leq \Delta\|e_{\eta\theta}\| + (\delta_{\alpha\eta} + \delta_{\Gamma\eta}\|\theta\|)\|\zeta\| + (\delta_{\alpha\xi} + \delta_{\Gamma\xi}\|\theta\|)\|e_{\xi}\| \end{aligned}$$

han sido usadas, estas pueden ser derivadas de (20). \dot{V}_e es negativa definida si

$$g > 0 \quad (21a)$$

$$G - \frac{1}{g}\gamma\gamma^T > 0 \quad (21b)$$

La condición (21a) puede ser lograda eligiendo $\mu_2 > 0$ suficientemente grande. Para satisfacer la condición (21b) se requiere que $G > 0$. Esto puede ser logrado escogiendo

$$\rho > \frac{c_2^2(\delta_{\alpha\xi} + \delta_{\Gamma\xi}\|\theta\|)^2}{4\delta\lambda_{\min}(P)c_3}.$$

En general, el requerimiento del valor de μ_2 depende de la cota de los parámetros desconocidos $\|\theta\|$. Para mostrar la convergencia en tiempo finito del subsistema (17a), se siguen los argumentos usados en [16], usando la función de Lyapunov (ver arriba) $V_1(e_1) = \zeta^T Y \zeta$ (con $\Omega = I$). ■

Note que, después de un tiempo finito, el valor exacto de η en el sistema (13) está disponible, así que desde ese momento el observador se comporta como si η e y fueran medibles.

IV. EJEMPLO

El objetivo del ejemplo es diseñar un Observador Disipativo Adaptable con ASTG, para el sistema de masas rotacional y translacional mostrado en la Figura 1, donde J es el momento de inercia de la masa rotacional, M es el valor de la masa translacional, d_1 es la constante de restitución de la flecha de la masa rotacional, R es el radio del disco, d_2 es la constante de restitución del resorte y B_1 es la constante fricción viscosa de la masa rotacional, el sistema queda descrito por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (22a)$$

$$\dot{x}_2 = [-x_1 \quad -x_2 \quad u - R^2 d_2 x_1 + R d_2 x_3] \theta \quad (22b)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (22c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M}[R d_2 x_1 - d_2 x_3 - B_2(x_4)] \quad (22d)$$

donde x_1 es la posición de la masa rotacional, x_2 es la velocidad de la masa rotacional, x_3 es la posición de la masa translacional, x_4 es la velocidad de la masa translacional, $\theta = [\frac{d_1}{J} \quad \frac{B_1}{J} \quad \frac{1}{J}]^T$ es el vector de parámetros desconocidos y $B_2(x_4) \in 0.2\text{signo}(x_4) + 0.2x_4$ es la no linealidad multivaluada, que es la suma de la fricción de Coulomb y fricción viscosa con coeficientes igual a 0.2. En la Fig. 2 se muestra la convergencia de los parámetros, lo cual se debe a la condición de excitación persistente provista por la entrada. El comportamiento del valor estimado de x_4 , que converge a su valor verdadero, puede ser apreciado en las Fig. 3 y 4. Se puede apreciar que la entrada aplicada al sistema, junto con la fricción seca, causa que el valor de x_4 permanezca por algunos intervalos de tiempo en $x_4 = 0$, donde $B(x_4)$ se vuelve una función multivaluada, a pesar de esta no linealidad fuerte en el comportamiento del sistema es notable que \hat{x}_4 converge a x_4 .

V. CONCLUSIONES

Un observador adaptable para una clase de sistemas con discontinuidades o no linealidades multivaluadas ha sido

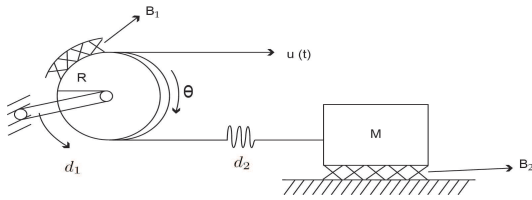


Figura 1. Sistema masa translacional y rotacional

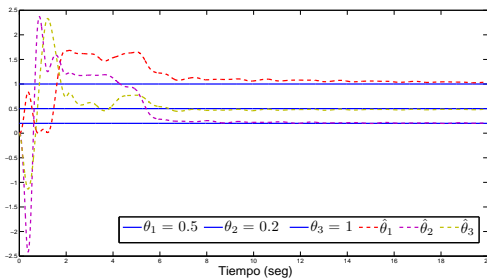


Figura 2. Convergencia de Parámetros.

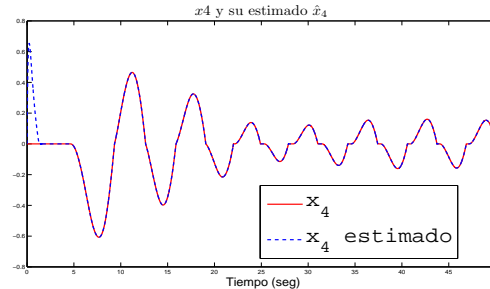


Figura 3. Estado desconocido x_4 y su estimado.

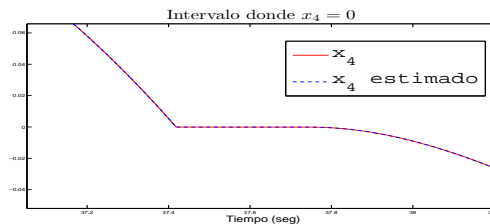


Figura 4. Acercamiento del estado desconocido x_4 y su estimado.

presentado. El diseño está basado en la combinación de una forma de observador adaptable introducida por [4] y el diseño de observador disipativo para sistemas multivaluados, introducido en [17]. También se obtiene una extensión de este resultado al mostrar que si el grado relativo de la forma de observador adaptable se incrementa en uno, el diseño del observador adaptable aun es posible. Este último resultado puede ser generalizado a la Forma de Observador Adaptable (2).

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen atentamente el soporte financiero de CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), Project 51244, and Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) UNAM, grant IN117610 y la beca CVU 270200 otorgada por CONACyT.

REFERENCIAS

- [1] Arcak, M. and Kokotovic, P. "Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis," *Automatica*, vol. 37, no. 12, pp. 1923–1930, 2001.
- [2] Baccioti, A. and Rosier, L. *Lyapunov functions and stability in control theory*. 2nd ed. New York, Springer-Verlag.
- [3] Bastin, G., Gevers, M.R., Stable Adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 (7), 1988, pp. 650–658.
- [4] Besançon, G., Remarks on nonlinear adaptive observer design, *Systems & Control Letters*, 41, 2000, pp. 271–280.
- [5] Besançon, G., *Nonlinear Observers and Application*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [6] Brogliato, B., Heemels, W.P.M.H. Observer Design for Lur'e Systems with Multivalued Mappings: A Passivity Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54 (8), 2009, pp. 1996–2001.
- [7] Davila, J., Fridman, L., Poznyak, A., Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes *International Journal of Control* Vol. 79, No. 10, October 2006, pp 1251–1262.
- [8] Farza, M., M'Saad, M., Maatoug, T., Kamoun, M., Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45, 2009, pp. 2292–2299.
- [9] Gauthier, J.-P., Hammouri, H. and Othman, S. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. Automatic Control* 37 (1992): 875–880.
- [10] Havard Fjaer Grip, Tor A. Johansen, Lars Imsland, Glenn-Ole Kaasa., Parameter estimation and compensation in systems with nonlinearly parameterized perturbations *Automatica*, 46, 2010, pp. 19–18.
- [11] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upsaddle River, New Jersey, 3rd. edition, 2002.
- [12] Levant, A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6 (1993): pp. 1247–1263.
- [13] Marino, R. and Tomei, P., *Nonlinear Control Design; Geometric, Adaptive & Robust*. London, Prentice Hall, 1995.
- [14] Moreno, J.A., Observadores adaptables para sistemas no lineales, *Memorias del Congreso Nacional de la AMCA 2001.*, San Luis Potosí, Mexico, Mayo 2001, pp 3–4
- [15] Moreno, J.A., Observer Design for nonlinear Systems: A Dissipative Approach, *Proceedings of the 2nd Symposium on System, Structure and Control (SSSC 2004)*, Oaxaca, Mexico, Dec. 2004, pp 735–740
- [16] Moreno, J.A., A Linear Framework for the Robust Stability Analysis of a Generalized Super-Twisting Algorithm, *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2009)*(Formerly known as ICEE., November 2009, pp 10–13
- [17] Moreno, J.A., Osorio, M. Dissipative Design of Observers for Multivalued Nonlinear Systems. *Proceedings of the 45th IEEE conference on Decision & Control*. December 2006, pp 5400–5405
- [18] Moreno, J.A. *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2005, vol. 322, ch. Approximate Observer Error Linearization by Dissipativity Methods, pp. 35–51.
- [19] Moreno, J.A. "A separation property of dissipative observers for nonlinear systems," in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, 2006, pp. 1647–1652.
- [20] Narendra, K.S., Annaswamy, A. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [21] Rajamani, R. Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.* 43 (1998): 397–401.
- [22] Rugh, W.J., *Linear System Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [23] Sastry, S., Bodson, M. *Adaptive Control Stability. Convergence and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989